

Prof. dr hab. Krzysztof Kułakowski
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Recenzja pracy doktorskiej p. Krishnadasa Mohandasa.
"Critical properties of structural balance models
on multiplex and growing networks"

Zadeklarowany temat rozprawy dotyczy sieci wielowarstwowych, których dynamika jest napędzana przez dwa procesy. Pierwszym jest dążenie do osiągnięcia równowagi strukturalnej wiązań opatrzonych znakami (plus lub minus), a drugim – do wyrównywania połączeń na tej samej pozycji w różnych warstwach. Oba procesy przyczyniają się do ewolucji systemu zgodnie ze schematem Monte Carlo. Głównym obiektem badań są termiczne przejścia fazowe, związane z fazą zwaną rajem ('paradise') i nieporządkiem międzywarstwowym. Symulacje są poparte teorią pola średniego. Ponadto, szczególną uwagę zwrócono na wzrost sieci, z warunkiem równowagi strukturalnej w każdym kroku czasowym. Osobny rozdział poświęcono modelowaniu i symulacjom tego procesu. Cele tych badań logicznie wynikają z aktualnej literatury, są oryginalne i uzasadnione.

Oprócz abstraktu i przedmowy rozprawa składa się z czterech rozdziałów i dwustronicowego streszczenia. Rozdział 1 poświęcony jest wprowadzeniu podstawowych pojęć: sieci wielowarstwowych, równowagi strukturalnej i procesów urnowych Polya. Trzy kolejne rozdziały zawierają szczegółowy opis badań i ich wyników. Ta konstrukcja jest przejrzysta i jasna. Cytowana literatura jest obszerna i dobrana poprawnie.

W rozdziale 2 podano postulowane wyrażenie energii w zależności od stanów wiązań w sieciach wielowarstwowych. Składa się z dwóch członów: pierwszy ma minimum globalne w każdym stanie strukturalnie zrównoważonym, a drugi ma minimum globalne jeśli stany tego samego wiązania w każdej warstwie są identyczne. Celem jest określenie, jak sprzężenie międzywarstwowe wpływa na strukturę wiązań w obrębie warstw, w tym na równowagę strukturalną. W tym rozdziale każda warstwa jest grafem w pełni połączonym. Zasadniczo opisane są tu dwie metody: teoria pola średniego i symulacje. Podejście analityczne jest zastosowane do układów dwu- lub trzywarstwowych. Większe układy opracowywane są przy przyjęciu dodatkowego uproszczenia, że informacja o dopasowaniu lub niedopasowaniu wiązań w różnych warstwach podawana jest w postaci liczby par, gdzie znaki wiązań są równe.

W tym samym rozdziale podejście pola średniego zostało sformułowane jako zbiór samouzgodnionych równań. Te równania stosowane są także jako iteracyjne, i podawane są wartości parametrów w których rozwiązanie przestaje być stabilne, aby określić punkt krytyczny. Dalej wyróżnia się stan dwóch równych klik jako najbardziej prawdopodobny stan zrównoważony. W ostatnich podrozdziałach tego rozdziału Autor podaje zestawienie temperatur zidentyfikowanych w badaniach, wraz z ich znaczeniami i związanym z nimi diagramem fazowym.

W Rozdziale 3 rozważane jest przejście fazowe w sieciach Erdosa-Renyi, charakteryzujących się daną gęstością wiązań. Podkreślono różnicę pomiędzy zakresem temperatur, w którym stan nieuporządkowany jest niestabilny,

a zakresem, w którym stabilna jest faza uporządkowana (początek strony 66). Tu badania dotyczą drugiego z tych przypadków. Co więcej, jest to faza 'paradise' (wszystkie linki wewnątrz warstwy dodatnie), która gra rolę fazy uporządkowanej. W tym rozdziale rozważania ograniczają się do jednej i dwóch warstw. W tym drugim przypadku wiązania w jednej warstwie nie są skorelowane z wiązaniami w drugiej, stąd powstają niekompletne pary które nie przyczyniają się do energii międzywarstwowej. Poza tym podejście to jest modyfikacją wcześniejszego artykułu (Ref 102) dotyczącego grafów zupełnych. Jak twierdzi Autor, w schemacie pola średniego wyrażenia na energię wewnątrzwarstwową i międzywarstwową można sprowadzić do wzorów dla grafów w pełni połączonych, jeśli zastosuje się odpowiednie relacje skalowania z gęstością wiązań. Wynikiem badania jest relacja skalowania dla temperatury krytycznej, dość dokładna z wyjątkiem zakresu małych wartości gęstości.

Problem rozpatrywany w rozdziale 4 ma charakter kombinatoryczny: ewolucja sieci rosnącej w czasie, utrzymywanej w stanie równowagi strukturalnej. W skrócie: nowy węzeł jest dołączany do losowo wybranego węzła, a utworzone połączenie jest dodatnie z prawdopodobieństwem p i ujemne z prawdopodobieństwem $1-p$. Następnie uzupełniane są połączenia nowego węzła ze wszystkimi pozostałymi węzłami, tak aby zachować stan równowagi. Wzrost rozmiarów dwóch wewnętrznie przyjaznych i wzajemnie wrogich społeczności okazuje się dość złożony. W szczególności rozkład prawdopodobieństwa tego rozmiaru jest bimodalny, jeśli parametr p przekracza pewną wartość krytyczną.

Rozprawa poparta jest dwoma artykułami opublikowanymi w Physical Review E, gdzie p. Mohandas jest pierwszym autorem, a lista współautorów jest dość krótka. Treść tych artykułów jest zgodna z rozdziałami 2 i 3 pracy. Praca przytacza również preprint w arXiv który przedstawia treść rozdziału 4, z sześcioma współautorami; tutaj ponownie nazwisko kandydata znajduje się na pierwszym miejscu. Podsumowując, nie mam wątpliwości, że osobisty wkład p. Mohandasa jest na tyle poważny, że może on ubiegać się o tytuł. Mogę również stwierdzić, że tekst pracy jest przejrzysty i poprawny. Błędy są niewielkie; niektóre z nich są wymienione poniżej.

Moim zdaniem najważniejszym mankamentem jest brak dyskusji pewnej sprzeczności. Jak zostało wyraźnie stwierdzone w abstrakcie, oddziaływanie pomiędzy warstwami stabilizuje równowagę strukturalną. W literaturze istnieje jednak inna teoria, cytowana w pracy jako Ref. 66, gdzie wniosek jest odwrotny. Mianowicie kontakt pomiędzy warstwami modelowany jest jako współczynnik β w równaniu ruchu. W przypadku gdy β jest symetryczna i dodatnia, preferowane są te same znaki wiązań w obu warstwach, podobnie jak działa człon K we wzorze na energię. Jednak ten kontakt utrudnia równowagę, jak pokazano na ryc. 3a w ref. 66, i Autor to rozpoznaje (patrz s. 28), ale nie próbuje znaleźć żadnego wyjaśnienia. Z nadzieją oczekuję komentarza podczas obrony pracy.

Istnieje również pewien szczegół pojęciowy, który w tekście pozostaje niezauważony: definicja równowagi strukturalnej w grafach niepełnych. W klasycznej pracy Cartwrighta i Harary'ego (nr 5 w pracy) ukuto termin „graph 3-balanced”, aby zaznaczyć ograniczenie rozważanych zamkniętych ścieżek do triad w definicji energii. W tym duchu Diaz-Diaz i wsp. (DOI:10.48550/arXiv.2511.17247) rozróżniają równowagę „heiderianowską”

i „harariańską”. Krótki komentarz na temat tej subtelności byłby w pracy doktorskiej cenny.

Drobne błędy:

Niektóre stwierdzenia wydają się nieco zbyt pompatyczne, jak na przykład na stronie 23: „in this thesis, I introduce a modified multiplex framework where interlayer connections are not established between identical agents across layers but between the edges that connect the same pair of agents in different layers”, oraz “This structural adaptation provides a novel perspective on multiplex network analysis” wydają się być nieuzasadnioną deklaracją oryginalności.

strona 27: „traditional social science methods focus on individual motivations and behaviors” – bardzo bezpodstawne stwierdzenie

strona 28: dziękuję za przytoczenie ref. 70, ale nie ma tam nic o sieciach wielowarstwowych

strona 29, rys. 1.4: niebieskie i czerwone linie jako przyjazne i wrogie kontakty mieszają się z niewyjaśnionymi niebieskimi i czerwonymi strzałkami

strona 84: “generating factions or factions” ?

strona 85: $p^{\{ch\}}$ pojawia się po raz pierwszy bez żadnego wyjaśnienia

strona 88: “rate equation Rate equation” (powtórzone)

strona 89: “since the model incorporates stochastic elements – stemming from both the random selection of attachment targets and the probabilistic bias parameter p —this mean-field description is insufficient to capture the full dynamics of the system.” wydaje mi się dziwnym argumentem, ponieważ zastosowanie MFA do problemów dynamicznych jest tak częste. Proszę o bardziej szczegółowe określenie: co Pan ma na myśli?

Bibliografia: co najmniej trzy odnośniki są podwojone: 5 i 108, 28 i 84, 102 i 110

Jednak moim zdaniem wady te mają niewielkie znaczenie w porównaniu ze znajomością narzędzi fizyki statystycznej, umiejętnościami i zasobem pracy wykonanej przez p. Mohandasa. W ocenianej rozprawie metody Monte Carlo, teoria pola średniego oraz równania kinetyczne są właściwie rozumiane i stosowane. Uzyskane wyniki są oryginalne i odpowiednio udokumentowane. Ktokolwiek ma zamiar kontynuować te badania, może czerpać korzyści z tekstu rozprawy i publikacji. Bez wahania mogę stwierdzić, że p. Mohandas jest dobrze przygotowany do prowadzenia badań naukowych.

W związku z tym wnioskuję o dopuszczenie rozprawy do publicznej obrony.

Krzysztof Kwakolud

Kwakolud, 10 I 2026